

COLEGIO DE BACHILLERATO “MANÚ”

Año Lectivo: 2020 - 2021
Fecha: del 24 al 28 de Agosto 2020
Docente Tutor: Ing. Vanessa Medina

AÑO EDUCATIVO: BACHILLERATO

AREA AGROPECUARIA

PROYECTO # 1 Semana # 3

TITULO DE PROYECTO:

Por un mundo mejor. Reflexiones y acciones sobre problemas del mundo contemporáneo.

OBJETIVO DE APRENDIZAJE

Los estudiantes comprenderán que, para resolver problemas de la vida cotidiana relacionada a temas sociales, ambientales, económicos, culturales, entre otros, es necesario aplicar estrategias de razonamiento lógico, creativo, crítico y complejo, y comunicar nuestras ideas de forma asertiva para actuar con autonomía e independencia.

INDICACIONES

En este mes vamos a realizar un informe sobre la base de varios estudios de caso relacionados con los problemas del mundo contemporáneo. Para ello, podemos usar los siguientes recursos y materiales:

- Libros de texto de las diferentes asignaturas.
- Cuaderno u hojas de trabajo.
- Lápiz, esfero y borrador.
- Lápices de color.

DÍA Y DESAFÍO

ACTIVIDADES Y RECURSOS

Miércoles 26/08/2020
Y
Jueves 27/08/2020

Conexión con Matemáticas: Tres ciudades del Ecuador han tenido que cerrar muchas de sus empresas a causa de la pandemia, tenemos el número de empresas cerradas en Ambato (A), Babahoyo (B) y Cuenca (C).
El total de empresas cerradas es de 285. El número combinado entre Babahoyo y Cuenca es mayor en 15 unidades que el doble de empresas de Ambato. El número combinado de

**DOCENTES
RESPONSABLES:**

Matemáticas
Ing. Vanesa Medina
(0939283616)

Ambato y Babahoyo es mayor en 45 unidades que el triple del número de empresas de Cuenca. Determinar el número de empresas que cerraron en cada ciudad.

A = número de empresas cerradas en Ambato
B = número de empresas cerradas en Babahoyo
C = número de empresas cerradas en Cuenca

$$A + B + C = 285$$

$$B + C = 2A + 15$$

$$A + B = 3C + 45$$

$$1) A + B + C = 285$$

$$2) -2A + B + C = 15$$

$$3) A + B - 3C = 45$$

Despejamos A en ecuación (1)

$$A = 285 - B - C$$

Sustituyo en la ecuación (2) y ecuación (3)

$$-2(285 - B - C) + B + C = 15$$

$$3B + 3C = 585$$

$$(285 - B - C) + B + 3C = 45$$

$$C = 60$$

Sustituyo C = 60

$$3B + 3(60) = 585$$

$$B = 135$$

Sustituyo C = 60 y B = 135 en la ecuación (1)

$$A = 285 - B - C$$

$$A = 90$$

Respuesta:

El número de empresas cerradas a causa de la pandemia es:

- Ambato 90 empresas
- Babahoyo 135 empresas Cuenca 60 empresas.

Refuerza tu conocimiento con tu texto integrado de Segundo de Bachillerato en Matemática desde la página 8 hasta la página 26 y resuelve los ejercicios de la página 15, ejercicio 4 y ejercicio 5, literal c) y d).

En hojas extras para que las incluya en tu portafolio.



Compromisos	<p>Me comprometo a:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tomar unos minutos diarios para conversar con mis seres queridos en casa sobre nuestras ideas y emociones. • Comunicarme con mis amigos y compañeros mediante mensajes, llamadas telefónicas o video llamadas. • Tomar un tiempo para relajarme y reducir la preocupación por las noticias sobre la pandemia. Hacer ejercicio físico. 	
<p><i>RECUERDA: Es importante que cumplas con todas las actividades de esta semana para evitar contratiempo por acumulación de tareas</i></p>		
ELABORADO:	APROBADO:	REVISADO:
<p>DOCENTES BACHILLERATO DOCENTE TUTOR: Ing. Vanessa Medina FECHA: 20/08/2020</p>	<p>RECTOR: Mgs. Judith Bustan FECHA: 20 Agosto 2020</p>	<p>CTP.BS: Lcdo. Franco Mora FECHA: 20 Agosto 2020</p>
Firma:	Firma:	Firma:

ANEXO 2: MATEMÁTICAS

Sistemas de ecuaciones lineales y probabilidad

Matemática y megaconstrucciones: Coca Codo Sinclair

Entre las provincias de Napo y Sucumbios se encuentra el proyecto más importante de nuestro país, Coca Codo Sinclair, la represa hidroeléctrica más grande en la historia del Ecuador. El caudal del río Coca permite a la represa 200 m³ por segundo de caudal medio anual, eso es doble de la cantidad media anual del río Paute. Dicho caudal será aprovechado en su totalidad para ser transformado en energía eléctrica.

La energía generada anualmente será de 8.600 GWh, suficiente para cubrir el 36% de la demanda de todo el país. Adicionalmente, el Estado ahorrará cerca de 2,5 millones de dólares al año, porque ya no compraremos energía a los países vecinos ni se importará diésel para las plantas térmicas.

Observa y contesta

¿A qué hace referencia la fotografía de esta sección?

- Consulta con tus padres, ¿qué sucede con la energía eléctrica en época de sequía?
- ¿Cuál es el caudal medio anual del río Paute?
- En un mes, ¿cuál es el ahorro del Estado con la puesta en marcha de esta represa?
- ¿Cómo interviene la matemática en esta megaconstrucción?



1

unidad

Bloques curriculares
Algebra lineal
Probabilidad

Objetivos

- OCM1. Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, gráfica, pública o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de los turnos de clase, para así comprender mejor los roles, atender las necesidades y promover hábitos de estudio, para y tomar decisiones con responsabilidad social.
- OCM2. Valorar, según la fase de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la situación de los conocimientos matemáticos con los que se han desarrollado científicamente y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, cultural y político.
- OCM3. Describir la necesidad o la importancia de aplicar los conocimientos matemáticos al momento de entender y solucionar problemas de la realidad (económica, administrativa, ambiental, de salud, permanente y equitativa) de manera crítica.

Ministerio de Educación, 2018

OCM1.118 Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas (diferentes soluciones), utilizando los métodos de sustitución y eliminación gaussiana.

OCM1.119 Resolver y plantear problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones lineales (tres o más ecuaciones lineales con tres o más incógnitas) interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Saberes previos
¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

Desafío cognitivo
¿Qué tipo de soluciones puede tener un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?

Recuerda que...
 $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
Los métodos analíticos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas son:
a) Sustitución
b) Eliminación gaussiana.

Comparte
¿Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y tres ecuaciones con la misma solución es común a todas ellas?

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Se designa con \mathbb{R}^3 al producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, esto es, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Los elementos de \mathbb{R}^3 son ternas ordenadas. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$ se denomina primera componente o abscisa, $y \in \mathbb{R}$ se denomina segundo componente u ordenada y $z \in \mathbb{R}$ se denomina tercera componente.

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se define por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d_1 \\ ax + by + cz = d_2 \\ ax + by + cz = d_3 \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ son denominados coeficientes de x, y, z respectivamente, y $d \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ son llamados términos independientes.

Denotamos con S al conjunto solución. Es claro que $S \subset \mathbb{R}^3$. Si existe al menos una terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para la solución del sistema de ecuaciones lineales, escribiremos $(x, y, z) \in S$. En el caso contrario, escribiremos $S = \emptyset$ diremos que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Organizamos tres clases o grupos de sistemas de ecuaciones lineales en tres clases. La **primera clase** está constituida por sistemas de ecuaciones lineales que poseen una única solución $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en cuyo caso $S = \{(x, y, z)\}$. Los sistemas de ecuaciones lineales de este grupo se conocen con el nombre de **sistemas consistentes**.

El **segundo grupo** de sistemas de ecuaciones lineales es el que consiste en todos aquellos que poseen una **infinitud de soluciones** y se denominan **sistemas sobredeterminados**.

La **tercera clase** de sistemas de ecuaciones lineales está formada por aquellos que **no tienen solución**. Estos sistemas se denominan **inconsistentes**.

Método de resolución por sustitución
Explicaremos este método en los siguientes ejemplos.

Ejercicio resuelto
Consideremos el sistema de ecuaciones lineales definido por $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

En el método de sustitución se procede de la siguiente forma: de la primera ecuación obtenemos

$$x = \frac{1}{2}(5 - y + z)$$

Reemplazamos x en la segunda y tercera ecuaciones del último sistema, lo que da lugar al par de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(5 - y + z) + 2y + 2z = 3, \\ -\frac{1}{2}(5 - y + z) + y + z = 0, \end{cases}$$

de las que, luego de realizar algunas simplificaciones, se obtiene

$$\begin{cases} \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema de ecuaciones precedente obtenemos y :

$$y = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z \right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}z$$

Reemplazamos y en la segunda ecuación. Tenemos:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}z \right) + \frac{1}{2}z = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}z = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

de donde $z = -1$.

Calculamos x e y . Como $y = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}z$, $y = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}(-1)$ se sigue que

$$y = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}(-1) = 2.$$

Puesto que $x = \frac{1}{2}(5 - y + z)$ y que $y = 2, z = -1$, se obtiene

$$x = \frac{1}{2}(5 - 2 - 1) = 1.$$

La solución del sistema de ecuaciones propuesto es $\{1, 2, -1\}$.

Escribiremos $S = \{(1, 2, -1)\}$ para referirnos al conjunto solución del sistema de ecuaciones propuesto.

Como se dijo anteriormente, en el método de sustitución se tienen varias opciones para la resolución del sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio resuelto

Veamos otra forma de encontrar la solución. Resolvemos el mismo sistema de ecuaciones lineales propuesto pero esta vez seleccionamos la incógnita y , a la que obtenemos de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ -x + y + z = 0. \end{cases}$$

Recuerda que...

En el ejemplo resuelto 1, al reemplazar x de la primera ecuación en la segunda y tercera ecuaciones dio lugar al sistema de dos ecuaciones lineales con las incógnitas y y z . A este sistema lo resolvimos por el método de sustitución.

El método de sustitución es muy flexible en el sentido siguiente: la incógnita x fue elegida de la primera ecuación; esa misma incógnita se pudo obtener de la segunda o tercera ecuación y se reemplazó en las restantes, lo que dio lugar a un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas

$$(x, z) \in \mathbb{R}^2.$$

El conjunto solución S se expresa como:

$$S = \{(x, 4 + x, 4 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Para $x = 0$, una solución es $(0, 4, 4)$. Para $x = -2$, otra solución es $(-2, 2, 6)$. Puede comprobarse inmediatamente que $(0, 4, 4)$ es solución del sistema propuesto.

Análogamente, $(-2, 2, 6)$ es otra solución. Escribiremos $\{(0, 4, 4), (-2, 2, 6)\} \in S$.

Este es un ejemplo de un sistema de ecuaciones que admite una infinidad de soluciones y, por lo tanto, pertenece a la clase de sistemas de ecuaciones sobredeterminado.

Ejercicio resuelto

Veamos un ejemplo de sistema inconsistente de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 6, \\ 5x - 2y + 3z = -6, \\ -x + 4y + 3z = 6. \end{cases}$$

Apliquemos el método de sustitución. De la primera ecuación obtenemos $z = \frac{1}{3}(6 - 2x - y)$. Al reemplazar z en las dos restantes, obtenemos

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3 \left[\frac{1}{3}(6 - 2x - y) \right] = 6, \\ -x + 4y + 3 \left[\frac{1}{3}(6 - 2x - y) \right] = 6, \end{cases}$$

que, luego de algunas simplificaciones, queda como

$$\begin{cases} 3x - 3y = -12, \\ -4x + 3y = 0. \end{cases}$$

Si en el sistema de ecuaciones precedente la primera ecuación se multiplica por $\frac{4}{3}$ y la segunda se multiplica por $-\frac{1}{3}$, se deduce el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x - 4y = -16, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Si de la primera ecuación se obtiene $x = y - 4$ y se reemplaza en la segunda ecuación, se obtiene

$$y - 4 - y = 0,$$

de donde $-4 = 0$, lo que es un absurdo. El sistema de ecuaciones propuesto no tiene solución.

En este caso decimos que el conjunto solución S es vacío y escribimos $S = \emptyset$.

Interdisciplinariedad

En la actualidad vivimos una revolución tecnológica acelerada, en la que programas computacionales resuelven grandes sistemas de ecuaciones con igual número de incógnitas en pocos minutos. Por ejemplo, para el análisis de los esfuerzos de las estructuras de acero de un puente de cien puentes aéreas, los ingenieros resuelven un sistema de 1 500 ecuaciones simultáneas que, gracias a la tecnología, fueron resueltas en 15 minutos.



© Foto Oriental Pearl y el Centro Financiero de Shanghai

Glosario

incógnitas. Edificio de gran altura y muchos pisos.
simultáneas, simultáneas. Dicho de una cosa que se hace u ocurre al mismo tiempo que otra.

Recuerda que...

Al ser el método de sustitución muy flexible, también se pudo haber seleccionado la incógnita z de cualquiera de las tres ecuaciones. Al reemplazar ese resultado en las otras dos ecuaciones restantes, se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Conexiones con las TIC

Para reforzar y ampliar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas, puedes mirar el siguiente video:



Int.ly/2fWmva1

Tenemos $y = x - z$ y reemplazamos en la primera y segunda ecuación. Obtenemos:

$$\begin{cases} 2x + x - z - z = 5 \\ x + 2(x - z) + 2z = 3, \end{cases}$$

de donde:

$$\begin{cases} 3x - 2z = 5 \\ 3x = 3. \end{cases}$$

De la ecuación $3x = 3$ obtenemos $x = 1$. De la primera ecuación se obtiene $z = \frac{1}{2}(3x - 5)$, con lo que $z = \frac{1}{2}(3 \times 1 - 5) = -1$.

Puesto que $y = x - z$, entonces $y = 1 - (-1) = 2$.

Así, la solución es $\{1, 2, -1\}$, que es exactamente la misma que ya obtuvimos.

Ejercicio resuelto

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales definido por: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; y

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

Apliquemos el método de sustitución.

De la tercera ecuación obtenemos $y = 3x + 2z - 4$. Reemplazamos en la segunda ecuación. Obtenemos

$$-2x + (-4 + 3x + 2z) - z = 0$$

y, luego de simplificar, resulta

$$x + z = 4,$$

que es exactamente la primera ecuación.

Como se puede observar, este sistema es **sobredeterminado**, esto es, admite una **infinitud de soluciones**.

El par de ecuaciones se reduce a una sola ecuación $x + z = 4$, de donde $z = 4 - x, x \in \mathbb{R}$.

Asignando un valor de $x \in \mathbb{R}$, podemos calcular z y, en consecuencia, el valor de y . Puesto que $y = -4 + 3x + 2z$, se sigue que

$$y = -4 + 3x + 2(4 - x) = 4 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Así, las soluciones del sistema de ecuaciones propuesto tienen la forma

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ dado,} \\ y = 4 + x, \\ z = 4 - x. \end{cases}$$

Taller práctico

DECO M3.1.10. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas (lineales reducidas), utilizando los métodos de sustitución o eliminación gaussiana.

1. Considera el sistema de ecuaciones lineales definido por

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{cases} 2x + y + 2z = 1, \\ 3y - y - 2z = -6, \\ -3x + y + 10z = 6. \end{cases}$$

Aplica tres variantes del método de sustitución para hallar la solución del sistema propuesto, y comprueba que en cada variante se obtiene la solución $(-1, 3, 0)$.

2. Considera el sistema de ecuaciones lineales definido por

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{cases} x + y + z = \frac{11}{5}, \\ 2y + z = \frac{1}{5}, \\ 10z = 2. \end{cases}$$

Aplica el método de sustitución eligiendo primero la incógnita y de la segunda ecuación y halla la solución del sistema de ecuaciones propuesto. Además, verifica que la solución es

$$\left(2, 0, \frac{1}{5}\right)$$

3. Aplica el método de sustitución para hallar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen en cada ítem, donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ designan las incógnitas. Comprueba la solución.

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ -2x + 4y + z = -5, \\ -x - z = 3. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ -x + 4y + z = 1,4, \\ x + y + z = 0,5. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + 3y = 5,6, \\ 2x + 3y + 2z = 8,4, \\ 2y + 3z = 6,5. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 7,8, \\ 3x + 2y = 5,2, \\ 2y + 3z = 6,1. \end{cases}$$

4. Plantea un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas y resuelve en tu cuaderno.

a) La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es 48. Dentro de diez años el doble de la suma de las edades de los hijos excederá en 6 años a la edad del padre. Cuando nació el padre la edad del padre excedía 26 unidades al triple de la edad que tenía el hijo mayor. ¿Cuál es la edad de los tres?

b) Un grupo de personas se reúnen para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión?

i)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 4,5, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = 3,1, \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{9}y + \frac{1}{10}z = 1,6. \end{cases}$$

Trabajo colaborativo

Diversidad funcional en el aula

Cuando en el equipo de trabajo existen competencias que requieren atención diversa es necesario flexibilizar los procesos, recursos, espacios, tiempos para lograr buenos resultados.

Trabajen en equipo, indaguen y resuelvan

5. Apliquen el método de sustitución para hallar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen en cada ítem donde $x, y, z \in \mathbb{R}$ designan las incógnitas. Comprueben la solución.

a)
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + z = 1 + \sqrt{2}, \\ 0,6x + 3y + 2z = -1, \\ x + y + \sqrt{2}z = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

b)
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 1,6.$$

c)
$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{12}z = 6.$$

d)
$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{8}z = 8.$$

e)
$$\begin{cases} 0,2x + 0,3y + 0,4z = -10, \\ -0,1x + 0,2y - 0,2z = 2,5, \\ 0,4x = 0,4y. \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 15x + 20y + 25z = 23, \\ 30x + 5y + 10z = 15,5, \\ 40x + 30y + 20z = 31. \end{cases}$$

6. Consideren el sistema de ecuaciones:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} 2x + y = \frac{5}{4}, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Apliquen todas las variantes (4 en total) del método de sustitución para hallar la solución de dicho sistema. solución:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

DECO M3.1.10. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas (3x3), utilizando los métodos de sustitución o eliminación gaussiana.

Elimina primero la incógnita z

¿Qué es un sistema lineal de ecuaciones lineales?

Eliminación gaussiana

En un sistema de ecuaciones lineales, ¿qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la diagonal para que la solución del sistema sea única?

Recorda que

Los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas más o menos de resolver son los sistemas diagonales:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Los sistemas diagonales se resuelven de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d_1}{a_1}, \\ y = \frac{d_2}{b_2}, \\ z = \frac{d_3}{c_3}. \end{cases}$$

Método de eliminación gaussiana

Consiste de tres etapas. Las dos primeras que consisten a transformar el sistema de ecuaciones en una triangular superior, y la tercera etapa que consiste en resolver el sistema de ecuaciones triangular superior.

Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales siguientes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ 2x - y - 2z = 1, \\ 3x - 2y + 5z = 10. \end{cases}$$

Primera etapa. Mantendremos fija la primera ecuación. La trata de eliminar la incógnita x de la segunda y tercera ecuación.

Restamos a la segunda ecuación $2 \times$ la primera, multiplicamos por $3 - 1$ (coeficiente de x de la segunda ecuación, dividido para el coeficiente de x de la primera ecuación, resultado de operar a la primera ecuación) y le sumamos el resultado a la segunda ecuación. Obtenemos

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ -3y - 4z = -13, \\ 3x - 2y + 5z = 10. \end{cases}$$

Restamos a la tercera ecuación $3 \times$ la primera, multiplicamos por $5 - 3$ (coeficiente de x de la tercera ecuación, dividido para el coeficiente de x de la primera ecuación, resultado de operar a la primera ecuación) y le sumamos el resultado a la tercera ecuación. Se obtiene

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ -3y - 4z = -13, \\ -2y + 2z = 11. \end{cases}$$

Segunda etapa. Mantendremos fija la primera y segunda ecuaciones, y eliminamos y en la tercera ecuación. Multiplicamos por $-\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$ a la segunda ecuación, y el resultado se suma a la tercera. Obtenemos

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ -3y - 4z = -13, \\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{22}{3}. \end{cases}$$

Tercera etapa. Resolvemos el sistema de ecuaciones triangular superior. Comenzamos con la última ecuación. Obtenemos $z = \frac{11}{2} = 5,5$.

De la segunda ecuación obtenemos $y = \frac{3(-13) - 2(5,5)}{-3} = \frac{-52 - 11}{-3} = \frac{-63}{-3} = 21$.

La solución es $x = 2, y = 21, z = 5,5$, que se escribe $(2, 21, 5,5)$.

Opinión resultó:
Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones lineales, donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son las incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + y = -2, \\ 3x + 4y + z = 2, \\ -3x + 4y + z = 6. \end{cases}$$

Aplicaremos el método de eliminación gaussiana. Mantendremos fija a la primera ecuación, y pasaremos a la eliminación de la incógnita x en la segunda y tercera ecuaciones. Multiplicaremos a la primera ecuación por $x = -\frac{3}{2}$, sumamos el resultado a la segunda ecuación.

Obtenemos:

$$\begin{cases} 2x + y = -2, \\ \frac{3}{2}y + z = 1, \\ -3x + 4y + z = 6. \end{cases}$$

Sea $x = -\frac{3}{2} + \frac{z}{2}$.

Multiplicamos la primera ecuación por 4, y sumamos el resultado a la tercera ecuación. Tenemos:

$$\begin{cases} 2x + y = -2, \\ \frac{3}{2}y + z = 1, \\ \frac{11}{2}y + z = 4. \end{cases}$$

Para obtener un sistema de ecuaciones lineales superiores, mantendremos fija la primera y segunda ecuación del sistema, procediendo eliminamos la incógnita z de la tercera ecuación.

Sea $z = -\frac{11}{2}y + 4$. Reemplazamos el coeficiente de z de la tercera ecuación por el coeficiente de z de la segunda ecuación, multiplicamos a la segunda ecuación por 11, y sumamos el resultado a la tercera. Resulta:

$$\begin{cases} 2x + y = -2, \\ \frac{3}{2}y + z = 1, \\ -\frac{6}{2}y + z = \frac{6}{2}. \end{cases}$$

Como ya hemos obtenido un sistema de ecuaciones triangulares superiores. Despejamos su solución. De la tercera ecuación se obtiene $x = 1$, $y = \frac{2}{3}(1 - z) = \frac{2}{3}(1 - 1) = 0$.

De la primera ecuación se deduce $x = -\frac{3}{2} - \frac{z}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1 - 1) = -1$.

La solución del sistema de ecuaciones lineales propuesto es $(-1, 0, 1)$.

Escucha con...

En el caso de un sistema de ecuaciones lineales triangulares, la solución en x y z de las ecuaciones de la diagonal del sistema son en orden: $x = \frac{a_1}{a_{11}}$, $z = \frac{a_2}{a_{22}}$, $x = \frac{a_3}{a_{33}}$, en cuyo caso la solución es:

$$\begin{cases} x = \frac{a_1}{a_{11}}, \\ z = \frac{a_2}{a_{22}}, \\ x = \frac{a_3}{a_{33}}. \end{cases}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales triangulares superiores se resuelven de arriba hacia abajo, es decir, se resuelve primero la ecuación de la diagonal del sistema con una sola incógnita, $x = \frac{a_1}{a_{11}}$, $z = \frac{a_2}{a_{22}}$, $x = \frac{a_3}{a_{33}}$.

La idea fundamental en el método de eliminación gaussiana es transformar el sistema de ecuaciones lineales dado en un sistema de ecuaciones lineales triangulares superiores que, como hemos visto, es más simple de resolver.

¡Pi!

Recordemos que un sistema de ecuaciones lineales triangulares superiores se resuelve de arriba hacia abajo, es decir, se resuelve primero la ecuación de la diagonal del sistema con una sola incógnita, $x = \frac{a_1}{a_{11}}$, $z = \frac{a_2}{a_{22}}$, $x = \frac{a_3}{a_{33}}$.

Taller práctico

1. Analiza y determina las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales (triangulares superiores y triangulares inferiores).

a) En el sistema de ecuaciones lineales triangulares superiores, definido como:

$$\begin{cases} 2x = 11, \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} 2x = 11, \\ -3y = 5, \\ 3y = -5. \end{cases} \end{cases}$$

¿Cuáles son las soluciones? **Verifica** tu respuesta.

b) En el sistema de ecuaciones lineales triangulares superiores, definido como:

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases} \end{cases}$$

¿Cuáles son las soluciones?

c) En el sistema de ecuaciones lineales triangulares inferiores, definido por:

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} 3x = 4, \\ 3x + 4y = 18, \\ -3x + 4y + z = 11. \end{cases} \end{cases}$$

¿Cuáles son las soluciones?

2. Completa la solución, en caso de un sistema de ecuaciones lineales que se propone:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} x + z = 2, \\ -2x + y = 1, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

Intercambia las ecuaciones del sistema siguiente:

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ -2x + y = 5, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

Mantén fija la primera ecuación. **Elimina** x de la segunda ecuación. Para ello, **multiplicamos** la primera ecuación por

$$k = -\frac{2}{3}.$$

Elimina y de la tercera ecuación.

Verifica si obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 1, \\ -3x + 4y + z = 11, \\ 0 = \frac{11}{3}. \end{cases}$$

¿Qué indica la tercera ecuación?

¿Qué sucede con la solución del sistema?

3. Aplica el método de eliminación gaussiana para hallar la solución de cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen. En caso de calcular la solución, compruébala de ser posible, indica si el sistema de ecuaciones lineales $a, b, c \in \mathbb{R}$ denota que las incógnitas x, y, z admiten o no alguna solución.

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x + 2y = 8, \\ -y = 3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -2, \\ -x + y = 1, \\ 2x + 3y = -3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

h) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

Trabajo colaborativo

Desarrolla el siguiente problema de aplicación en tu grupo.

Al comprar un equipo en un supermercado, se le descontó el 20% del precio original. ¿Cuánto pagó el cliente si el precio original era de \$100.000? ¿Cuánto pagó el cliente si el precio original era de \$200.000?

Trabajen en equipos, indaguen y resuelvan.

Aplican el método de eliminación gaussiana para hallar la solución de cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen. En caso de calcular la solución, compruébala de ser posible, indica si el sistema de ecuaciones lineales $a, b, c \in \mathbb{R}$ denota que las incógnitas x, y, z admiten o no alguna solución.

1) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ -0x + 0y + 0z = 0, \\ 1x + 0y = -1. \end{cases}$

2023-03-17: Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas requiere aplicar métodos similares a los utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas
¿Cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas?

Desafío sugerido
¿Puede un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas tener soluciones infinitas?

Recorda que
En un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, el sistema puede tener una, infinitas o ninguna solución. Esto depende de la relación entre los coeficientes de las variables y los términos independientes.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

Consideremos sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas para encontrar el conjunto solución. Si el conjunto solución es un punto, una línea o un plano, entonces el sistema tiene una, infinitas o ninguna solución.

Este tipo de ecuaciones se resuelven por una de las siguientes formas:

Forma de ecuación
Considera el sistema de ecuaciones $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones propuesto en forma de ecuación de la forma $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Despejamos con z el conjunto solución. Este es:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} z = 1 - 2x + y \\ x + 3y - 2(1 - 2x + y) = 2 \end{cases} \right\}$$

Despejamos z en la primera ecuación, obtenemos $z = 1 - 2x + y$ y reemplazamos en la segunda ecuación

$$x + 3y - 2(1 - 2x + y) = 2$$

de donde $5x + y = 4$ y de esta ecuación, $y = 4 - 5x$. Reemplazamos y en la primera ecuación. Obtenemos

$$z = 1 - 2x + (4 - 5x) = 5 - 7x$$

De la definición del conjunto S se tienen los resultados siguientes:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} z = 5 - 7x \\ y = 4 - 5x \\ x = x \end{cases} \right\}$$

Reemplazando las soluciones y y z en S se tiene

$$S = \{ (x, 4 - 5x, 5 - 7x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Así, el conjunto solución S queda descrito como

$$S = \{ (x, 4 - 5x, 5 - 7x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Ejercicio resuelto
Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 4 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $z = \frac{2}{3}(3y - 2x)$

Reemplazando en la segunda ecuación, resulta

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}(3y - 2x) \right) = 4$$

y de esta última ecuación se obtiene $0 = 4$, lo que es un absurdo. Este sistema de ecuaciones no tiene solución. Luego, $S = \emptyset$.

Ejercicio resuelto
Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{cases} -3x + 3y - 2z = -5 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{10}y + \frac{1}{5}z = \frac{3}{10} \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene $z = \frac{3}{2}(-3x + 3y + 5)$. El reemplazo en la segunda ecuación da lugar a

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{10}y + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{2}(-3x + 3y + 5) \right) = \frac{3}{10}$$

y de esta última se obtiene $\frac{1}{10}x - \frac{3}{10}y + \frac{3}{10}y + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$. Esto significa que la segunda ecuación es un múltiplo escalar de la primera. Multiplicamos a la segunda ecuación por -10 . Tenemos

$$-x + 3y - 3y + 3 = -3$$

que es exactamente la primera ecuación. Luego, el par de ecuaciones dado se reduce a la ecuación $-3x + 3y - 2z = -5$. Así,

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 3y - 2z = -5 \right\}$$

De la definición del conjunto S tenemos la siguiente equivalencia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} z = \frac{3}{2}(3y - 2x + 5) \\ x = x \end{cases} \right\}$$

con lo que el conjunto solución S se escribe como

$$S = \left\{ \left(x, \frac{2}{3} \left(\frac{2z + 3x - 5}{2} \right) + \frac{z}{3} \right) \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $x = y = 5$ una solución es $S = \left\{ (5, 5, \frac{1}{2}) \right\}$. Si $x = -1, y = 2$ una solución es $S = \{ (-1, 2, 8) \}$.

Recorda que
En el ejercicio resuelto de la página anterior, es importante hacer notar que las variables y y z en las primeras ecuaciones se cancelan y se obtiene una ecuación en términos de x y z . Esto es una alternativa de solución.

Una alternativa es despejar x y y en términos de z . Una vez que se despeja x y y en términos de z , se debe reemplazar en las ecuaciones originales para encontrar el conjunto solución.

Taller práctico

1 Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen. Dado $x, y, z \in \mathbb{R}$ con las incógnitas. Escribe de ser posible, dos soluciones particulares.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Prohibida su comercialización

Prohibida su comercialización

Taller práctico

1 Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, expresando la solución como un par de números reales.

a)
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = \frac{1}{2}x - 1 \\ -3x + 2y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

2 Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales que se proponen, dando $x, y \in \mathbb{R}$ con las soluciones particulares.

a)
$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 3x - 11y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 6y = 1 \\ 3x = \frac{1}{2}y + 9 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

3 Considera el sistema de ecuaciones lineales $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\begin{cases} x - y = 2 + 0 \\ 2x + 3y = 1 + 0 \end{cases}$$
 y usa λ el siguiente sistema lineal $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\begin{cases} x - y = 2 + \lambda \\ 2x + 3y = 1 + \lambda \end{cases}$$

a) Elimina la incógnita x del par de ecuaciones, expresa las incógnitas y, z en función de $\lambda \in \mathbb{R}$, y demuestra que
$$y = \frac{1}{5}(-4 - \lambda) \quad z = 3\lambda$$

b) Elimina la incógnita y del par de ecuaciones, expresa las incógnitas x, z en función de λ , y comprueba que
$$x = \frac{1}{5}(\lambda - 1) \quad z = 3\lambda$$

c) Elimina z del par anterior y expresa las incógnitas x, y en función de λ . Demuestra que
$$x = \frac{1}{5} \left(\lambda - \frac{1}{3} \right) \quad y = \frac{1}{5} \left(\lambda - \frac{1}{3} \right)$$

Sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas

Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Sea un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas con la forma siguiente:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \\ gx + hy = k \end{cases}$$

Se supone que $|a| + |b| > 0$ (esto es, a, b no son ambos cero).

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, se procede así: se elige un par de ecuaciones cualesquiera de las dos primeras:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Aplica cualquier método de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a (x, y) en solución del sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, es decir, que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es solución del sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es solución de la tercera ecuación, esto es, $ax + by = c$, entonces $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es solución del sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas y se dirá que el sistema es consistente. Si no, entonces $S = \emptyset$.

Ejemplo resuelto
 Considera el sistema de ecuaciones $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ dx + 10y = -32 \\ 3x + 5y = -15 \end{cases}$$

y usa λ el siguiente sistema. Para resolver este sistema, procedamos primero a encontrar, si existe, una solución de la primera y segunda ecuaciones. Aplicámonos el método de sustitución.

De la primera ecuación obtenemos $x = \left(2 - \frac{2}{3}y\right)$ y de la segunda, $x = \frac{-32}{10} - \frac{1}{2}y$. Luego, igualando los segundos miembros, resulta
$$\left(2 - \frac{2}{3}y\right) = \frac{-32}{10} - \frac{1}{2}y$$

que muestra que el sistema reducido de dos ecuaciones es sobre-determinado. Multiplicámonos a la primera ecuación por 15, y a la segunda por $\frac{1}{2}$.

Obtendremos
$$\begin{cases} 3x - 2y = -15 \\ 3x + 5y = -15 \end{cases}$$

que se reduce a la sola ecuación $3x + 5y = -15$.

Sea $Z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ una solución.

Como $3x + 5y = -15$ es $x = \frac{1}{3}(-15 - 5y)$ luego $Z = \left(-5 - \frac{5}{3}y, y\right) \in \mathbb{R}^2$.

Verifiquemos si Z es o no solución del sistema original propuesto. Para el efecto, comprobamos si $Z = \left(-5 - \frac{5}{3}y, y\right)$ con $y \in \mathbb{R}$ satisficiera la tercera ecuación. Tenemos que
$$\frac{1}{2}\left(-5 - \frac{5}{3}y\right) + \frac{1}{3}y = -15 - \frac{5}{6}y + \frac{2}{6}y = -15 - \frac{1}{2}y$$

o sea, $Z = \left(-5 - \frac{5}{3}y, y\right) = \left(-5, 0\right) + y\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ con $y \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones propuesto. Consecuentemente, el conjunto solución se escribe como
$$S = \left\{ \left(-5, 0\right) + y\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

Este es un ejemplo de sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que posee infinitas soluciones.

Ejercicios resueltos
 Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\begin{cases} 3x = y + 2 \\ x + 5y = 32 \\ 4x + 7y = -34 \end{cases}$$

Hallamos la solución de este sistema, y determinamos con λ el conjunto solución. Procedamos a resolver el ejemplo anterior.

Primero, hallamos la solución de
$$\begin{cases} 3x = y + 2 \\ x + 5y = 32 \end{cases}$$

Para ello, hallamos el método de sustitución. De la primera ecuación obtenemos $y = 3x - 2$ y reemplazando en la segunda, obtenemos $x + 5(3x - 2) = 32$, de donde $-5x + 15 = 32$ o sea $10x = 17$ o $x = \frac{17}{10}$.

Una solución es $Z = \left(\frac{17}{10}, -\frac{11}{10}\right)$.

Verifiquemos si esta es la solución del sistema de ecuaciones propuesto. Tenemos
$$4x + 7y = 4 \cdot \frac{17}{10} + 7 \cdot \left(-\frac{11}{10}\right) = -\frac{14}{10} \neq -\frac{34}{10} = -3.4$$

Este es un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución.

Recorda que...
 Los sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas, en general, no tienen solución. Cuando ya tienen solución, a estas soluciones se las llama soluciones triviales. En algunos casos, cuando el sistema es consistente, puede tener infinitas soluciones.

Historia y matemática
 Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue conocido como el príncipe de las matemáticas. En 1801, cuando tenía 24 años, descubrió el método de los mínimos cuadrados para ajustar los datos de las órbitas de los planetas.



Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Taller práctico

1 Analiza compleja y responde:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -10x + 20y = -8 \\ 20x - 30y = -8 \end{cases}$$

(a) y (b) en el eje cartesiano.

Determina el conjunto solución S de este sistema.

Elige la primera y segunda ecuaciones y resuelve por sustitución.

2 Resuelve los sistemas que en cada caso se indican, de forma gráfica y algebraica.

(a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 4x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x + 3y = 30 \\ 2x + 3y = 36 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$

Prohibida su comercialización